UNIVERSIDAD SIMÓN BOLÍVAR
DIVISIÓN DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas

MATEMATICAS I (MA-1111)
2do Parcial (30%)

TIPO 730 A

Nombre: ________________________________

Carnet: _______________ Sección: ______

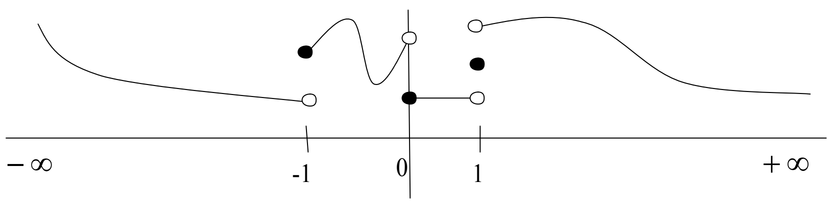
JUSTIFIQUE TODAS SUS RESPUESTAS

1.

a) Sean f y g dos funciones tales que: $\lim\limits_{x\to 5} f(x)=3$ y $\lim\limits_{x\to 5} g(x)=-1$. Hallar $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{f(x)+g(x)}{f(x)g(x)}$, indicando las propiedades utilizadas.	b) Definir formalmente $\lim\limits_{x\to c^{+}} f(x)=L$

c) Indicar los intervalos de continuidad, según la gráfica indicada a continuación

(1 Pto c/u)



d) Hallar $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(x)}{x^2}$	e) Sabiendo que $0<g(x)<(x-2)^2$, para $x\neq 2$. Hallar $\lim\limits_{x\to 2} g(x)$

2. Hallar los siguientes limites:

a) $\lim\limits_{x\to \pi/2}\dfrac{1+\tan^2(x)}{\cos^2(x)}$ (3 Ptos)	b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{sen(x-1)\sqrt{(x-1)^2}}{x-1}$ (3 Ptos)
c) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x-3-\sqrt{x-1}}{x^2-25}$ (4 Ptos)	d) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{x^2-1}{x+2}-\dfrac{x^2+10}{x+1}\right)$ (4 Ptos)

3. Dada la función f definida por: $f(x)=\begin{cases} x+a & si \quad x<3 \\ 5 & si \quad x=3 \\ \dfrac{\sqrt{x+1}-b}{x-2} & si \quad x>3 \end{cases}$ (6 Ptos)

Hallar los valores de a y b para que f sea continua en todo $\mathbb{R}$

4.

a) Enunciar el Teorema del valor intermedio. (2 Ptos)

b) Probar que existe un $t\in(2,3)$, tal que: $f(t)=5$, donde $f(x)=\dfrac{x^3+1}{x+1}$ (3 Ptos)

Nota: Se tomará en consideración la redacción, el procedimiento y el resultado

UNIVERSIDAD SIMÓN BOLÍVAR
DIVISIÓN DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS
Departamento de Matemáticas Puras y Aplicadas
MATEMATICAS I (MA-1111)
2do Parcial (30%)

TIPO 730 A

Nombre: ______________________________

Carnet: ______________ Sección: ______

1.

a) Sean f y g dos funciones tales que:

$$\lim_{x\to 5} f(x) = 3 \quad y \quad \lim_{x\to 5} g(x) = -1$$

Hallar $\lim_{x\to 5}\frac{f(x)+g(x)}{f(x)g(x)}$, indicando las propiedades utilizadas.

Solución:

$$\lim_{x\to 5}\frac{f(x)+g(x)}{f(x)g(x)} = \frac{\lim_{x\to 5}\left(f(x)+g(x)\right)}{\lim_{x\to 5}\left(f(x)g(x)\right)}$$

$$= \frac{\left(\lim_{x\to 5} f(x)\right)+\left(\lim_{x\to 5} g(x)\right)}{\left(\lim_{x\to 5} f(x)\right)\left(\lim_{x\to 5} g(x)\right)}$$

$$= \frac{3+(-1)}{3(-1)} = -\frac{2}{3}$$

b) Definir formalmente

$$\lim_{x\to c^+} f(x) = L$$

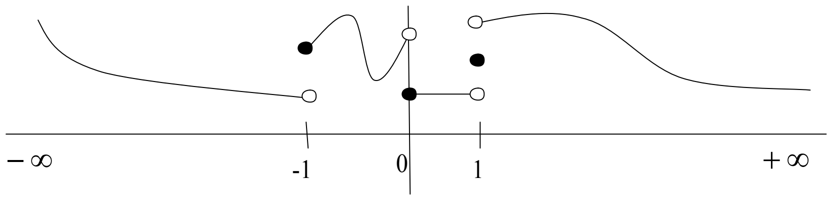
Solución:

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, talque:$

$0 < x - c < \delta \Rightarrow \left|f(x) - L\right| < \varepsilon$

(1 Pto c/u)

c) Indicar los intervalos de continuidad, según la gráfica indicada a continuación



Solución:

La función es continua en $(-\infty,-1)\cup(-1,0)\cup(0,1)\cup(1,+\infty)$

d) Hallar $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2}$

Solución:

$$\frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{(1-\cos(x))(1+\cos(x))}{x^2(1+\cos(x))} = \frac{\left(1-\cos^2(x)\right)}{x^2(1+\cos(x))}$$

$$= \frac{sen^2(x)}{x^2(1+\cos(x))} = \frac{sen(x)}{x}\frac{sen(x)}{x}\frac{1}{(1+\cos(x))}$$

Por lo tanto:

Nota: Se tomará en consideración la redacción, el procedimiento y el resultado

UNIVERSIDAD SIMÓN BOLÍVAR
DIVISIÓN DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas
MATEMATICAS I (MA-1111)
2do Parcial (30%)

TIPO 730 A

Nombre: ______________________

Carnet: ______________ Sección: ______

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{sen(x)}{x}\frac{sen(x)}{x}\frac{1}{(1+\cos(x))}\right)$$

$$=\left(\lim_{x\to 0}\frac{sen(x)}{x}\right)\left(\lim_{x\to 0}\frac{sen(x)}{x}\right)\left(\lim_{x\to 0}\frac{1}{(1+\cos(x))}\right)=1\,.\,1\,.\,\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

e) Sabiendo que $0<g(x)<(x-2)^2$, para $x\neq 2$.
Hallar $\lim_{x\to 2} g(x)$

Solución:

Como $\lim_{x\to 2} 0 = 0 = \lim_{x\to 2}(x-2)^2$, entonces por el teorema del emparedado

$\lim_{x\to 2} g(x)=0$

2. Hallar los siguientes limites:

a) $\lim_{x\to \pi/2}\frac{1+\tan^2(x)}{\cos^2(x)}$ (3 Ptos)

Solución:

$$\lim_{x\to \pi/2}\frac{1+\tan^2(x)}{\cos^2(x)}=\lim_{x\to \pi/2}\frac{1}{\cos^4(x)}=+\infty$$

b) $\lim_{x\to 1}\frac{sen(x-1)\sqrt{(x-1)^2}}{x-1}$ (3 Ptos)

Solución:

$$\lim_{x\to 1}\frac{sen(x-1)\sqrt{(x-1)^2}}{x-1}$$

$$=\left(\lim_{x\to 1}\frac{sen(x-1)}{x-1}\right)\left(\lim_{x\to 1}\sqrt{(x-1)^2}\right)$$

$$=1\,.\,0=0$$

c) $\lim_{x\to 5}\frac{x-3-\sqrt{x-1}}{x^2-25}$ (4 Ptos)

Solución:

$$\frac{x-3-\sqrt{x-1}}{x^2-25}$$

$$=\frac{\left(x-3-\sqrt{x-1}\right)\left(x-3+\sqrt{x-1}\right)}{\left(x^2-25\right)\left(x-3+\sqrt{x-1}\right)}$$

$$=\frac{(x-3)^2-(x-1)}{\left(x^2-25\right)\left(x-3+\sqrt{x-1}\right)}$$

$$=\frac{x^2-6x+9-(x-1)}{\left(x^2-25\right)\left(x-3+\sqrt{x-1}\right)}$$

d) $\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{x^2-1}{x+2}-\frac{x^2+10}{x+1}\right)$ (4 Ptos)

Solución:

$$\frac{x^2-1}{x+2}-\frac{x^2+10}{x+1}$$

$$=\frac{\left(x^2-1\right)(x+1)-\left(x^2+10\right)(x+2)}{(x+2)(x+1)}$$

$$=\frac{x^3+x^2-x-1-x^3-2x^2-10x-20}{x^2+3x+2}$$

$$=\frac{-x^2-11x-21}{x^2+3x+2}=-\frac{x^2+11x+21}{x^2+3x+2}$$

Nota: Se tomará en consideración la redacción, el procedimiento y el resultado

UNIVERSIDAD SIMÓN BOLÍVAR
DIVISIÓN DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas
MATEMATICAS I (MA-1111)
2do Parcial (30%)

TIPO 730 A

Nombre: ______________________________

Carnet: ______________ Sección: ______

$=\dfrac{x^2-7x+10}{(x^2-25)(x-3+\sqrt{x-1})}$ $=\dfrac{(x-2)(x-5)}{(x-5)(x+5)(x-3+\sqrt{x-1})}$ $=\dfrac{(x-2)}{(x+5)(x-3+\sqrt{x-1})}$ Luego: $\displaystyle\lim_{x\to5}\frac{x-3-\sqrt{x-1}}{x^2-25}$ $=\displaystyle\lim_{x\to5}\frac{(x-2)}{(x+5)(x-3+\sqrt{x-1})}$ $=\dfrac{(5-2)}{(5+5)(5-3+\sqrt{5-1})}=\dfrac{3}{40}$	$=-\dfrac{\left(\dfrac{x^2+11x+21}{x^2}\right)}{\left(\dfrac{x^2+3x+2}{x^2}\right)}=-\dfrac{1+11\frac{1}{x}+21\frac{1}{x^2}}{1+3\frac{1}{x}+2\frac{1}{x^2}}$ Luego: $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-1}{x+2}-\frac{x^2+10}{x+1}\right)$ $=-\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{1+11\frac{1}{x}+21\frac{1}{x^2}}{1+3\frac{1}{x}+2\frac{1}{x^2}}$ $=-\dfrac{1+11\,.\,0+21\,.\,0}{1+3\,.\,0+2\,.\,0}=-1$

3. Dada la función f definida por: $f(x)=\begin{cases} x+a & si \quad x<3 \\ 5 & si \quad x=3 \\ \dfrac{\sqrt{x+1}-b}{x-2} & si \quad x>3 \end{cases}$

Hallar los valores de a y b para que f sea continua en todo $\mathbb{R}$

Solución:

3.1.- f es continua en $(-\infty,3)$, ya que es un polinomio.
f es continua en $(3,+\infty)$, ya que es un cociente de funciones continuas y el denominador es no nulo en ese intervalo.

3.2.- Continuidad en $x=3$, $\left(\displaystyle\lim_{x\to3} f(x)=f(3)\right)$ (6 Ptos)

3.2.1.- $f(3)=5$

3.2.2.- $\displaystyle\lim_{x\to3} f(x)$

$\displaystyle\lim_{x\to3^-} f(x)=\lim_{x\to3^-}(x+a)=3+a$

y $\displaystyle\lim_{x\to3^+} f(x)=\lim_{x\to3^+}\frac{\sqrt{x+1}-b}{x-2}=2-b$

Luego el limite existe si se satisface: $3+a=2-b$

Por lo tanto f es continua en $x=3$, si se satisface: $3+a=2-b=5$

Nota: Se tomará en consideración la redacción, el procedimiento y el resultado

Es decir: $\begin{cases} 3+a=5 \\ 2-b=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=-3 \end{cases}$

f es continua en todo $\mathbb{R}$, si se toman los valores $a=2$ y $b=-3$

4.

a) Enunciar el Teorema del valor intermedio.

Solución: (2 Ptos)

Sea f una función continua en el intervalo $[a,b]$ y sea un w un valor entre $f(a)$ y $f(b)$, entonces existe un $c \in (a,b)$, talque: $f(c)=w$

b) Probar que existe un $t \in (2,3)$, tal que: $f(t)=5$, donde $f(x)=\dfrac{x^3+1}{x+1}$

Solución: (3 Ptos)

$f(2)=3$ y $f(3)=\dfrac{26}{4}=\dfrac{13}{2}$, como $f(2)<5<f(3)$ y la función es continua en $[2,3]$, se puede aplicar el teorema del valor intermedios y en consecuencia, existe un $c \in (2,3)$, talque: $f(c)=5$

Nota: Se tomará en consideración la redacción, el procedimiento y el resultado